Chaostheorie - nützlich oder vergänglich?

Kreuzer, Edwin

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1995 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.143-156

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

EDWIN KREUZER, Hamburg-Harburg

Chaostheorie – nützlich oder vergänglich?

Chaos ist das Wort mit der weltweit größten Wertsteigerung, so schrieb DER SPIEGEL, Brügge (1993), am Beginn seiner dreiteiligen Serie „Kult um das Chaos“ mit dem Untertitel „Aberglaube oder Welterklärung?“. In dieser Serie finden sich viele harsche Wort für die un*seriösen Protagonisten* der Chaostheorie. Viele erliegen in der Tat der Faszination prächtig falscher „Chaosdarstellungen“.

Viele reden und schreiben über die Chaostheorie: Mathematiker und Physiker, Ingenieure und Biochemiker, Ökologen und Mediziner und sogar Sozialwissenschaftler. Und wenn soviele darüber reden, dann ist es nicht erstaunlich, daß sogar Komponisten, Dichter, Tänzer, Psychologen und auch Manager davon angesteckt werden. Wenn soviele darüber reden, dann ist es klar, daß nicht alle, die es tun, auch etwas davon verstehen. Aber sie tun es trotzdem, und damit sind wir beim Problem. Chaostheorie beschreibt keine „wissenschaftliche Revolution“. Der Begriff „Chaostheorie“ erweckt genauso falsche Assoziationen wie der Begriff „Katastrophentheorie“.

Mit dem Artikel „Chaos, Fraktale und das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit“ stellt der Mathematiker Steffen (1994) sehr kritisch Beiträge zur Chaostheorie an den Pranger. Man muß seine Wertung nicht teilen, sie mag vielen gar provokativ überzogen vorkommen, aber er hat sicher manche besonders verwegene Deutungen, Spekulationen und Auswüchse zu Recht aufs Korn genommen.

Das Thema Chaos hat viele Facetten und so auch die dazu erschienenen Publikationen. Die Bandbreite an umfangreicher, lesenswerter Literatur deutscher Autoren aus dem Bereich der Ingenieurwissenschaften reicht von Argyris u.a. (1994) bis Straub (1990).

Ich will mich heute weder mit Steffens zum Teil beißender Kritik beschäftigen und auch nicht in den Kreis leidenschaftlicher Befürworter einreihen, sondern über meine nunmehr über fünfzehnjährige Erfahrung mit dem Thema „Chaostheorie“ berichten.

Für den Tübinger Biochemiker Otto Rössler ist der altgriechische Philosoph Anaxagoras der Urvater der Chaostheorie. Das könnte ein Beleg dafür sein, daß Chaos die Menschheit schon lange beschäftigt. Auch Leonardo da Vinci war von diesem Phänomen offenbar fasziniert, wie einige seiner Zeichnungen erahnen lassen, Bild 1. Ich befinde mich also in guter Gesellschaft!

Das Problem mit Vorhersagen und Prognosen

In die Zukunft sehen zu können, ist ein uralter Wunschtraum der Menschheit. In dem Bemühen, aus dem Gestern und Heute Aufschluß über das Morgen zu erlangen, haben Wissenschaftler die Propheten und Wahrsager abgelöst. Geheimnisvolle Weissagungen

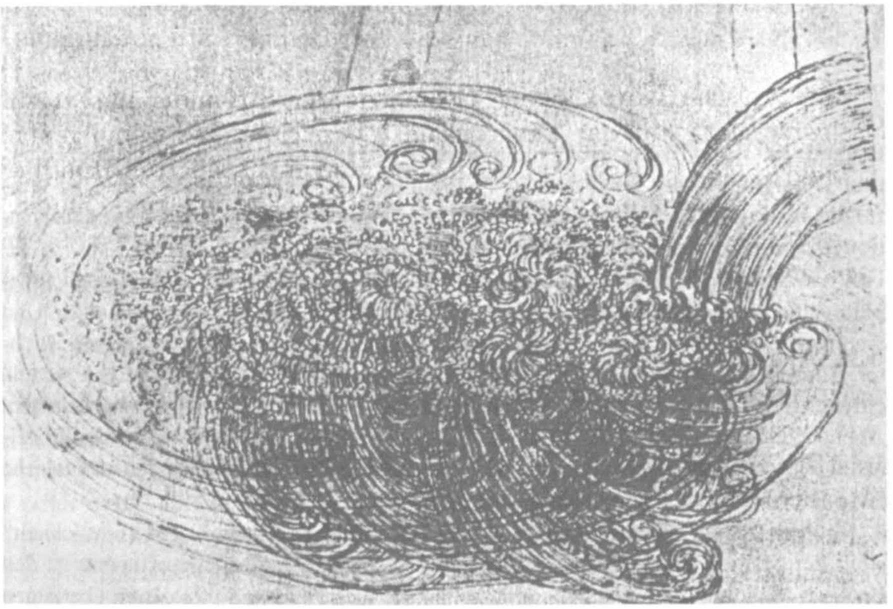

Bild 1:
Das Chaos ist der ungeordnete Urstoff! Leonardos wissenschaftliche Zeichnungen von bewegtem Wasser gelten mit Recht als Kunstwerke. Mit der hier wiedergegebenen Zeichnung stellt er einen Wasserstrahl dar, der sich aus einer viereckigen Öffnung in ein Becken ergießt und ein Gebilde von Blasen und Strudeln erzeugt. Die Zeichnung entstand vermutlich um 1507 im Zusammenhang mit einem hydraulischen Projekt in Mailand, Reti (1974).

und kryptische Orakelsprüche sind nüchternen Prognosen gewichen, Bammé und Kotzmann (1989).

Die naturwissenschaftliche Methode, Voraussagen zu treffen, hat nichts Mystisches mehr an sich. Zuerst wird das zu untersuchende Phänomen auf seine zentralen, quantitativ meßbaren Parameter reduziert. Dann werden die wesentlichen mathematischen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Parametern bestimmt und in Form von (Differential- bzw. Differenzen-) Gleichungen formuliert. Sind die Parameter, möglicherweise in ihrem zeitlichen Verlauf, und die Anfangsbedingungen bekannt, dann steht einer Prognose nichts mehr im Wege: Man messe die Anfangsbedingungen und setze diese sowie die Zahlenwerte der Parameter in die Gleichungen ein und berechne den zeitlichen Verlauf der Funktionen, Bild 2.

Wissenschaftler sind von Berufs wegen Minimalisten. Nicht weil sie faul sind, sondern weil die Wirklichkeit nie vollständig in Modellen erfaßt werden kann. Vielfach ist man sogar gezwungen, stark zu vereinfachen, da nur dann überhaupt eine mathematische Analyse möglich ist. Das generelle Motto der Projektion der Wirklichkeit auf ein Modell, der Abstraktion also, ist:

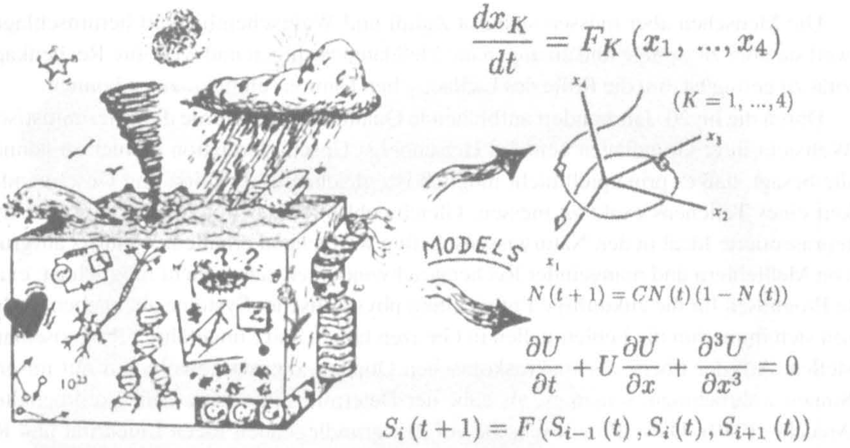

Bild 2:
Die Dynamik der realen Welt wird projiziert auf mathematische Modelle, die durch Gleichungen repräsentiert werden. Der Modellbildungsprozeß muß auf fundierten und überprüften mathematischen Prinzipien aufbauen und darf sich nicht im Phänomenologischen erschöpfen. Ein Modell wird aber keinesfalls ein vollständiges Abbild der Wirklichkeit sein. Bild nach Jackson (1989).

„Mache ein Modell so grob wie möglich und nur so fein wie unbedingt nötig!"
Oder mit den Worten von Albert Einstein: „Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher."

Prognosen sind dann aber nur so gut, wie das Modell die Wirklichkeit erfaßt. Vorhersagen, die den Anspruch erheben, mehr zu können, als durch das Modell gedeckt ist, sind nicht seriös und entbehren dem wissenschaftlichen Anspruch. Sie gehören in den Bereich der Spekulation.

Der „Laplacesche Dämon" oder „Gott würfelt nicht!"

Seit Kepler und Newton, d. h. über drei Jahrhunderte hinweg, war die Forschung wohl eher unbewußt auf Regelmäßigkeit ausgerichtet. Man war nur an regulären Bewegungen, seien sie linearer oder nichtlinearer Natur, interessiert (Poincaré war eine Ausnahme).

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts hat der französische Mathematiker und Physiker Pierre-Simon Laplace die vorher beschriebene Methode der Voraussage als weltanschauliches Prinzip formuliert. Er sprach von einer überirdischen Intelligenz (der Begriff des Dämons wurde wohl erst von E. Du Bois-Reymond geprägt): Wenn ein Wesen imstande wäre, die Lage, die Geschwindigkeit und den Impuls aller Massen, aus denen das Universum besteht, zu messen und dieses Zahlenmaterial in entsprechenden Gleichungen zu verarbeiten, dann könnte er den Zustand des Universums zu jedem Zeitpunkt der Vergangenheit und der Zukunft exakt bestimmen. Der Determinismus, geboren bei Newton und Leibniz, war auf seinem Höhepunkt.

Die Menschen aber müssen sich mit Zufall und Wahrscheinlichkeit herumschlagen, weil sie über zu wenige und zu ungenaue Meßdaten verfügen und weil ihre Rechenkapazität zu gering ist, um die Rolle des Laplaceschen Dämons einnehmen zu können.

Durch die im 20. Jahrhundert aufblühende Quantentheorie wurde die deterministische Weltsicht ihrer Grundlagen beraubt. Heisenbergs Unschärferelation ist hier zu nennen, die besagt, daß es prinzipiell nicht möglich ist, gleichzeitig Position und Geschwindigkeit eines Teilchens exakt zu messen. Gleichwohl blieb das durch den Determinismus repräsentierte Ideal in den Naturwissenschaften weitgehend erhalten. Wenn es aufgrund von Meßfehlern und mangelnder Rechengeschwindigkeit schon nicht möglich ist, exakte Prognosen für die zukünftige Entwicklung physikalischer Systeme abzugeben, so lassen sich immerhin die Fehlerquellen in Grenzen halten und „ungefähre" Prognosen aufstellen. Auf der Ebene der makroskopischen Objekte, die wir gewöhnlich mit unseren Sinnen wahrnehmen, schien es, als habe der Determinismus seine Gültigkeit behalten, Arecchi (1989). Diese Prognosen, die auf den grundlegenden Ideen Linearität und Reversibilität beruhen, genügen für die meisten technischen Anwendungsgebiete vollauf. Notfalls müssen die Messungen eben präzisiert und neue Rechentechniken entwickelt werden. Dieser Anschauung liegt eine abgeschwächte Variante des Laplaceschen Dämons zugrunde: Aus den ungefähren Ausgangsdaten läßt sich die künftige Entwicklung eben nur mit begrenzter Genauigkeit berechnen. Oder positiver formuliert: Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkung.

Linear kontra nichtlinear

Wurde ein Verhalten beobachtet, das diesen Regeln nicht folgte, dann wurde trotzdem das Prinzip nicht in Frage gestellt. Aber wir alle wissen, daß es immer wieder Ereignisse gibt, die scheinbar nicht vorhersehbar sind: etwa die Aktienkurse der Börse oder die Hochs und Tiefs der Wetterentwicklung.

Für Systeme, die nach deterministischen Gesetzen funktionieren, gilt, daß aus dem Systemzustand zu einer bestimmten Zeit das zukünftige Verhalten des Systems vorausberechnet werden kann. Aber selbst die einfachsten nichtlinearen Systeme – und praktisch alle Systeme der Realität gehorchen nichtlinearen Gesetzen – machen Vorhersagen extrem schwierig. Die Welt ist nichtlinear!

Dabei kann scheinbar Ordnung plötzlich an die Stelle von Chaos treten und umgekehrt. Wir beobachten sogar, daß in den meisten Systemen Ordnung und Chaos dicht beieinander liegen. Schlimmer noch könnte man sagen, es gibt häufig Situationen, bei denen leichte Störungen über regelmäßiges oder unregelmäßiges Verhalten entscheiden, Bild 3.

Es zeigt sich offensichtlich folgendes:

1. Sehr kleine Ursachen können große, überproportionale Wirkungen haben. Das kennzeichnet alle nichtlinearen Systeme im Gegensatz zu linearen Systemen, bei denen Ursache und Wirkung proportional zueinander sind.

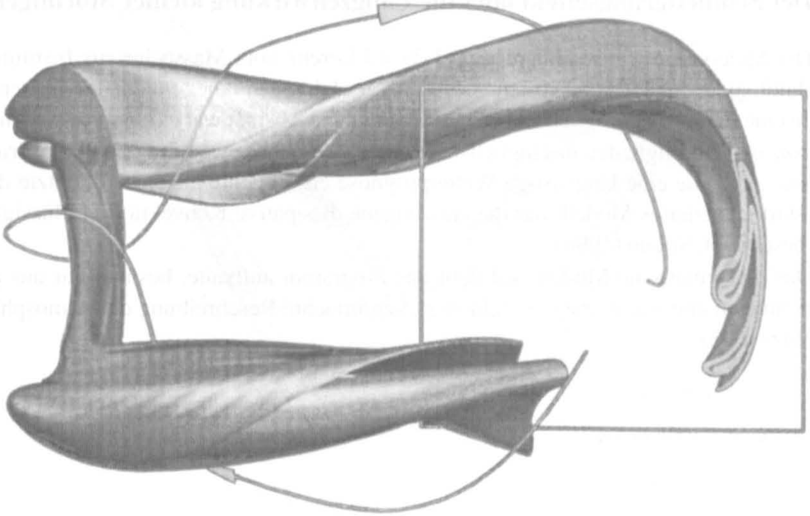

Bild 3:
Ein wichtiges Merkmal nichtlinearer dynamischer Systeme ist die Koexistenz unterschiedlicher Bewegungsformen. Das Bild gibt für die von Duffing (1918) angegebene Differentialgleichung eines nichtlinearen Schwingers eine unregelmäßige, chaotische Bewegung und eine periodische Bewegung wieder. Die chaotische Bewegung wird von einer unendlich langen Linie gebildet, die einen undurchdringlichen Strang komplexer geometrischer Struktur formt. Zur besseren Darstellung wurde der Strang durch einen Körper ersetzt, dem ein Sektor entnommen ist. Der Anfangszustand entscheidet, ob die Bewegung einen regelmäßigen oder unregelmäßigen Verlauf nimmt. Bild aus Kreuzer u. a. (1991).

2. Ein Versuch kann ganz einfachen, durchschaubaren Regeln folgen und trotzdem scheinbar nicht berechenbare Ergebnisse hervorbringen.

Die Entwicklung neuer, präziserer Meßtechniken und die Potenzierung menschlicher Rechenfähigkeiten durch den Computer verhießen der Wissenschaft weitere Erfolge in ihrem Bemühen, die Zukunft vorausberechnen zu können. Besonders die Meteorologen konnten hoffen, durch das immer dichter werdende Netz von Bodenmeßstationen und Wettersatelliten sowie durch den Einsatz immer leistungsfähigerer Computer genauere Wettervorhersagen treffen zu können. Die wirkliche Situation war aber verwirrend, ja geradezu paradox. Die Wissenschaft war in der Lage, Planeten- und Kometenbewegungen für Jahrhunderte vorauszubestimmen oder Astronauten sicher von der Erde auf den Mond und zurückzubringen, scheiterte aber häufig bei der Wettervorhersage für die nächsten Tage; von langfristigen Vorhersagen ganz zu schweigen.

Der Schmetterlingseffekt oder die Langzeitwirkung kleiner Störungen

Der Meteorologe und Mathematiker Edward Lorenz vom Massachusetts Institute of Technology in den USA hat Anfang der sechziger Jahre damit begonnen, das Wetter mit Hilfe eines Computerprogramms zu simulieren. Seine Absicht war es herauszufinden, ob es trotz der Zufälligkeiten des täglichen Wettergeschehens gewisse regelmäßige Grundmuster gäbe, die eine langfristige Wetterprognose ermöglichten. Lorenz benutzte dazu ein stark reduziertes Modell, das die erzwungene dissipative Konvektion in Flüssigkeiten beschreibt, Straub (1990).

Das mathematische Modell, auf dem das Programm aufbaute, bestand nur aus drei Gleichungen und war damit eine sehr stark vereinfachte Beschreibung der Atmosphäre, Lorenz (1963):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x),\\ \dot{y} &= -xz + rx - y,\\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Darin sind σ, r und b positive Parameter; für $r = 28$, $\sigma = 10$ und $b = 8/3$ zeigen die Simulationen sich nicht schließende Bahnkurven, Bild 4. Die Ergebnisse gaben Hinweise auf die Dynamik des Wettergeschehens. So oft Lorenz die Prozedur am Computer auch wiederholte: es gab zwar gewisse Grundmuster, die sich stets wiederholten, aber nie zweimal in genau derselben Weise. Immer waren die Muster durchsetzt von Störungen, gleichsam eine geordnete Unordnung.

Natürlich war Lorenz auch an längeren Wettersequenzen interessiert. Er wollte den Vorgang abkürzen und griff deshalb auf Daten einer bereits früher berechneten Sequenz zurück: Er begann die Computersimulation mit Parametern und Anfangsbedingungen aus der Mitte einer älteren Sequenz. Die Werte übernahm er mit einer Genauigkeit von drei Dezimalstellen hinter dem Komma. Das entsprach einer höheren Genauigkeit, als mit der Meteorologen gewöhnlich arbeiten.

Das Wetter wird in einem Computer streng deterministisch durch ein System mathematischer Gleichungen gesteuert. Aufgrund der Wahl seiner Ausgangsdaten mußte daher die neue Sequenz nach allen bisherigen Erfahrungen mit dem bekannten alten Verlauf übereinstimmen. Zu seinem Erstaunen stellte Lorenz fest, daß dem nicht so war. Nur kurz folgte die neue Sequenz ungefähr der alten, um dann einen völlig anderen Verlauf zu nehmen. Was war geschehen? Lorenz hielt eine Genauigkeit von drei Dezimalstellen für ausreichend; sein Computer aber rechnete intern mit einer höheren Genauigkeit, nämlich mit Zahlen bis zur sechsten Dezimalstelle.

Wenn also Lorenz zum Beispiel 0,293 eingab, der genaue Wert der alten Sequenz aber 0,293123 war, so startete der Computer also nicht mit demselben Anfangswert, sondern mit einem um 0,000123 kleineren.

Nach dem Prinzip – ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen – hätte dieser winzige Fehler keine Rolle spielen dürfen. Eine solche minimale numerische Abweichung hätte in ihrer Wirkung allenfalls einem leichten Windstoß, einem kaum spürbaren Hauch

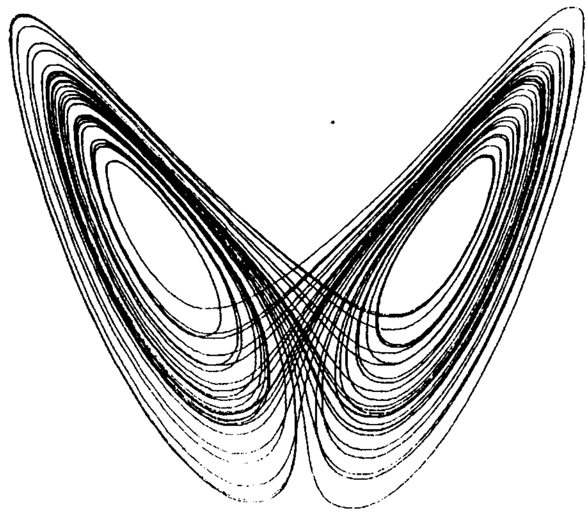

Bild 4:
Die Simulation der Lorenz-Gleichungen liefert für weite Bereiche der Parameterwerte chaotische Bewegungen. Für die angegebenen Parameterwerte erhält man das wiedergegebene, flächenartige Gebilde, den sogenannten Lorenz-Attraktor. Jede Bahnkurve auf dem Attraktor überstreicht die deformierte Acht, wobei ein unregelmäßiger Wechsel vom rechten zum linken Teil der Figur beobachtet werden kann. Kleine Änderung des Ausgangszustandes führen zu völlig unterschiedlichem Verlauf der Bewegung. Jede Bahnkurve kommt jedem Punkt des Attraktors im Laufe der Zeit beliebig nahe, ohne sich zu schließen.

gleichen dürfen. Zudem hätten sich solche winzigen, zu vernachlässigenden Differenzen zwischen Temperatur, Windstärke und Luftdruck in der Gesamtheit aufheben müssen. Der Sachverhalt, der in einer solchen Lehrmeinung zum Ausdruck kam, basiert auf dem Kausalitätsprinzip, das jedem physikalischen Modellsystem zugrunde lag. Die Ergebnisse von Lorenz widersprachen aber deutlich dieser Annahme.

Für die Meteorologie waren Lorenz' Ergebnisse geradezu irritierend, bedeuteten sie doch, daß langfristige Wettervorhersagen aus prinzipiellen Gründen nicht möglich sind, weil die Anfangsbedingungen nicht genau genug erfaßt werden können. Wie bei vielen anderen nichtlinearen Systemen, die scheinbar irreguläres Verhalten zeigen, hängen Wetter und Klima unter bestimmten Bedingungen sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. Minimale Abweichungen können bei kritischen Zuständen zu extremen Systemänderungen führen. Kleine Unterschiede werden schnell verstärkt und haben große qualitative Unterschiede im Endzustand zur Folge.

An einem einfachen Bild wird klar, wie der Begriff Abweichung zu verstehen ist und was Stabilität bedeutet, Bild 5. Wir wollen zwei Bahnen miteinander vergleichen, die jedoch von verschiedenen Landschaften umgeben sind: eine Talsohle und ein Bergkamm. Die exakte Anfangsposition A ist Ausgangspunkt der gewünschten Bahn; eine geringfü-

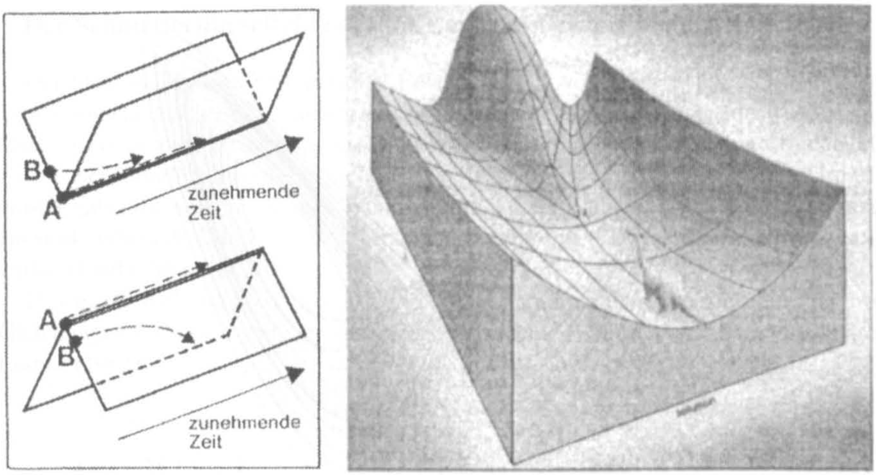

Bild 5:
Idealisierte Talsohle und idealisierter Bergkamm und Ausschnitt aus einer „Landschaft", nach Arecchi (1989) bzw. Nicolis (1991).

gig verschobene Position B ergibt eine Bahn, die sich im ersten Fall der gewünschten Bahn allmählich nähert (die Zeit gleicht unseren Irrtum aus). Im zweiten Fall entfernt sich die Bahn aufgrund des Hauchs von Abweichung aber mehr und mehr von A (die fortschreitende Zeit verstärkt unseren Irrtum). Ein System, das an eine solche Charakteristik aufweist, ist für unregelmäßiges, chaotisches Verhalten anfällig. Ein solcher Bergkamm und eine solche Talsohle bilden auch für dynamische Systeme nur Teile größerer Landschaften.

Diese Empfindlichkeit der Dynamik gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen bezeichnete Lorenz als Schmetterlingseffekt: Der Flügelschlag eines Schmetterlings in Braunschweig könne zwei Tage später das Wetter in München beeinflussen. Dies klingt zwar übertrieben, kennzeichnet aber sehr drastisch eine typische Eigenschaft nichtlinearer Systeme mit chaotischem Verhalten. Man nennt solche Systeme deshalb der Einfachheit halber chaotische Systeme.

Kausalität

Aber was heißt es nun, ein chaotisches System sei sensitiv abhängig von den Anfangsbedingungen. Die Mathematik faßt diesen Sachverhalt in eine exakte Definition. Sie lautet sinngemäß: Starten wir die Rechnungen mit beliebig nahe beieinanderliegenden Anfangswerten, so entwickelt sich der Prozeß völlig unterschiedlich. Das bedeutet, eine sichere Prognose ist mit gerundeten Meßdaten nicht möglich, sondern nur mit exakten (schwache Kausalität). Die Genauigkeit eines Computers läßt sich sicher steigern, aber es wird immer ein Meß- und Rundungsfehler bleiben, der den „Schmetterlingseffekt" bewirken kann. Man kann also nie von einem geometrischen Punkt ausgehen, aus dem eine „Zukunftslinie" hervorgeht (wie Laplace glaubte), sondern in der Regel von einem kleinen Fleck oder Raum, von dem fächerförmig auseinanderlaufende Linien ausgehen.

Die Forschungsergebnisse von Lorenz blieben bis in die siebziger Jahre weitgehend unbeachtet. Dann setzten außergewöhnlich umfangreiche Aktivitäten ein, die sich mit dem Problem des scheinbar unregelmäßigen Verhaltens nichtlinearer dynamischer Systeme befaßten. Begünstigt durch die enorm gesteigerte Leistungsfähigkeit und die leichte Verfügbarkeit von Computern war es relativ einfach, nichtlineare dynamische Systeme zu simulieren und mit ihnen zu experimentieren. Charakteristisch an dieser neuen Sicht der Dinge ist, daß für die mangelnde Prognosefähigkeit nicht prinzipiell zu behebende Defizite des wissenschaftlichen Instrumentariums verantwortlich gemacht werden können, wie sie die Denkfigur des „Laplaceschen Dämons" und die Annahme starker Kausalität physikalischer Systeme nahelegt, sondern die prinzipiell nicht vollständig darstellbaren Unregelmäßigkeiten des betrachteten Systems selbst. Ganz im Sinne des Laplaceschen Dämons ging man davon aus, es sei nur nötig, genügend viel Information anzusammeln und mit entsprechendem Aufwand zu verarbeiten.

Gleiche (schwache) Kausalität (Laplacesche Idee):
Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkung.

Ähnliche (starke) Kausalität :
Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkung,
(nötig wegen Experimenten).

Unregelmäßiges Verhalten nichtlinearer Systeme ist prinzipieller Natur und kann auch durch Anhäufen von mehr Information nicht vorhergesagt werden. Da dieses Zufallsverhalten in deterministischen Systemen auftritt, nennt man es auch deterministisches Chaos. Daß Systeme, die deterministischen Gesetzen folgen und keine zufälligen Anteile aufweisen, sich scheinbar regellos verhalten, klingt so paradox wie der Begriff deterministisches Chaos selbst. Der Begriff soll zum Ausdruck bringen, daß es dynamische Systeme gibt, die von deterministischen Gesetzen regiert werden und trotzdem unregelmäßiges Verhalten hervorbringen. Vorhersagen sind nur in den Phasen möglich, in denen sich das System „ordentlich" verhält bzw. es sind jene Grenzen (mit Einschränkungen) vorhersagbar, in denen es sich chaotisch verhält.

Nichtlineare Systeme verhalten sich durchaus in weiten Bereichen „ordentlich" – oder besser: regelmäßig – und weisen dort Gleichgewichtslagen oder Bewegungen auf, die langfristige Vorhersagen erlauben. Diese sind gekennzeichnet durch regelmäßige Attraktoren. Für bestimmte Parameterkonstellationen oder Anfangsbedingungen weisen sie jedoch scheinbar regelloses, chaotisches Verhalten auf. Man spricht dann auch von lokaler Instabilität, da sich benachbarte Zustände immer mehr voneinander entfernen, der Systemzustand aber trotzdem begrenzt bleibt. Die Bewegung verläuft dann auf sogenannten seltsamen Attraktoren.

Was bleibt?

Den Beifall aller hat erhalten,
wer mit dem Angenehmen das
Nützliche vermischt hat.
Horaz

Würden Systeme, die chaotisches Verhalten zeigen, keinerlei Regelmäßigkeit aufweisen, so wären sie für die Forschung nicht interessant. Gerade der Übergang eines stabilen Systems in chaotisches Verhalten unterliegt einer Reihe bedeutender, universeller Gesetzmäßigkeiten. Außerdem sind wir heute in der Lage, den Grad der Unregelmäßigkeit zu quantifizieren. Damit können wir angeben, wie häufig wir messen müssen, um den Systemzustand mit einer gewissen Unschärfe beobachten zu können, Bild 6.

Einige wichtige geometrische Ideen, mit denen Eigenschaften seltsamer Attraktoren erklärt werden können, gehören ebenfalls in diesen Bereich. Viele haben sicher schon mal die ästhetischen Bilder gesehen, die sogenannte Fraktale wiedergeben. Von einer Gruppe

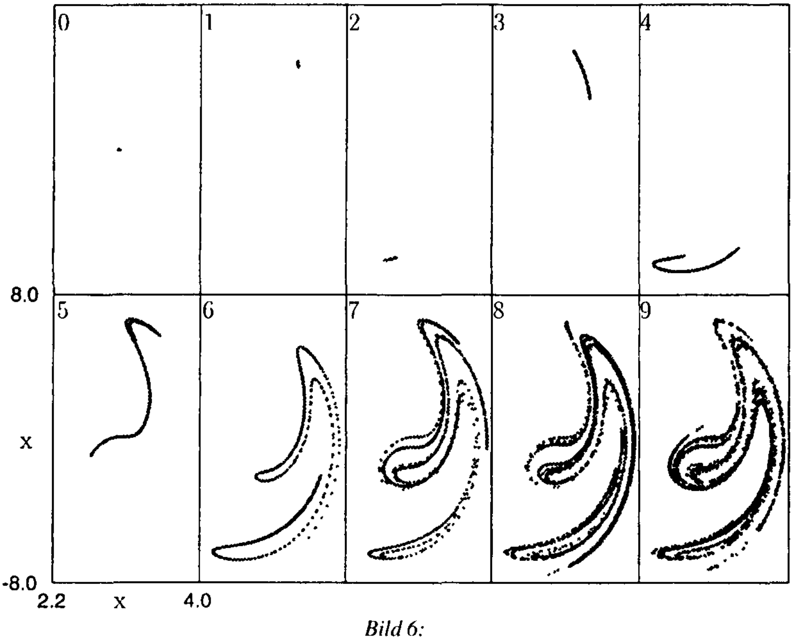

Bild 6:
Während regelmäßigen Systembewegungen liefern wiederholte Messungen keine zusätzlichen Informationen. Die Information über den „Aufenthaltsort" des Systems auf dem Attraktor schwindet jedoch bei chaotischem Verhalten dahin. Die Bildfolge zeigt Schnittbilder durch den Duffing-Attraktor von Bild 3, die nach gleichen Zeitabschnitten beobachtet werden können. In der Umgebung eines Punktes wurden viele Startbedingungen gewählt. Nach kurzer Zeit bedecken die verschiedenen Lösungen den ganzen Querschnitt. Mit Hilfe der Kolmogorov-Sinai-Entropie und der Informationsdimension kann man abschätzen, wie zuverlässig Vorhersagen für einen gewissen Zeitraum bei gegebener Meßgenauigkeit sind oder wie häufig Messungen zu wiederholen sind.

um den Mathematiker Heinz-Otto Peitgen vom Bremer Institut für dynamische Systeme wurde die Herstellung dieser Computergraphiken zu einer meisterhaften Perfektion entwickelt. Eine Reihe von Büchern der Gruppe wurde zu Bestsellern, Peitgen und Richter (1986), Peitgen und Saupe (1988), Peitgen u. a. (1992). Eine einfache Figur, an der sich das Prinzip solcher Fraktale gut erklären läßt, ist die Koch-Kurve, Bild 7.

Sie stellt eine idealisierte Schneeflocke dar, die von einem unendlich langen Linienzug gebildet wird, aber nur eine endliche Fläche umrahmt. Auf den ersten Blick völlig anders, jedoch in der Gesetzmäßigkeit gleichartig ist die Situation mit der Cantormenge, Bild 7. Man entnimmt im Laufe der Zeit unendlich viele Elemente aus der Strecke von Null bis Eins. Zunächst das Mitteldrittel, dann von den verbleibenden Teilen das Mitteldrittel, dann von .... Die gesamte entnommene Strecke addiert sich zu Eins. Trotzdem bleiben unendlich viele Punkte zurück. Auf die gleiche Weise verhält es sich mit allen Gebilden, die in sich geschachtelte Bilder darstellen. Also eine unendliche Serie von Bildern: Das Bild, im Bild, im Bild, ...

Die fraktale Dimension erlaubt uns anzugeben, wie groß der Grad der Verschlungenheit, Verkrumpeltheit, Löcherigkeit einer unregelmäßigen Figur (Küstenlinie, Wolke, seltsamer Attraktor, ...) ist. Die Dimension von regelmäßigen Objekten ist uns intuitiv geläufig (Punkt, Linie, Fläche).

Die Dimension der Kochkurve ist größer eins aber kleiner als zwei, sie ist 1,2618; für die Cantormenge berechnen wir als Dimension den Wert 0,6309!

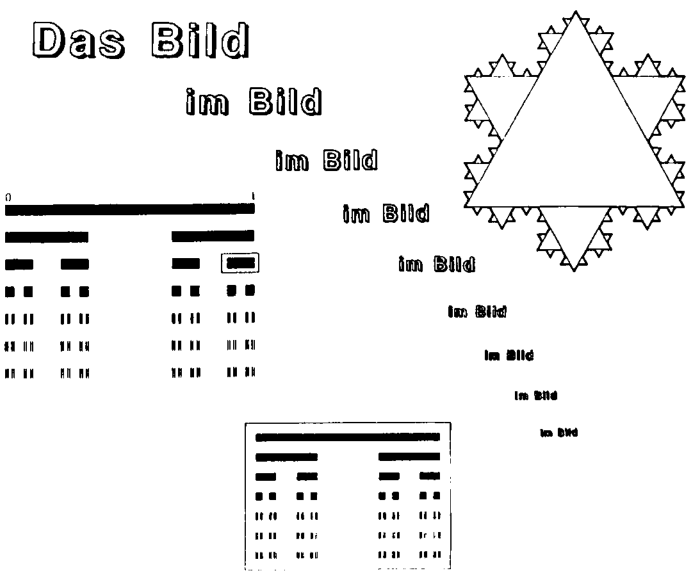

Bild 7:
Die Koch-Kurve und die Cantor-Menge sind zwei Beispiele, die sehr anschaulich das Prinzip der fraktalen Geometrie wiedergeben.

Die Aussagen dieses Abschnitts gehören zu den wichtigsten Erkenntnissen der Forschung auf dem Gebiet der nichtlinearen Dynamik und sind sicher mitverantwortlich für den Begriff „Chaostheorie". Das enge Beisammensein von Ordnung und Unordnung, das nichtlineare Systeme auszeichnet, fasziniert. Chaostheorie, Chaosmathematik und Chaosphysik sind aber eigentlich keine eigenständigen wissenschaftlichen Disziplinen, sondern eher reißerische Umschreibungen von Teilgebieten einer ernsthaften, aber auch komplexen Wissenschaftsrichtung, der Nichtlinearen Dynamik.

Epilog

Ach, wie bald schwindet
Schönheit und Gestalt.
Wilhelm Hauff

Die kurze Zeitspanne der jüngsten Wissenschaftsgeschichte, die mit der sogenannten „Chaosforschung" verbunden ist, zeigt mehr als die hier diskutierten Ergebnisse. Sie macht deutlich, daß Werkzeuge, über die Wissenschaftler verfügen, die Theorien und Vorstellungen, die sie sich von der Welt entwickeln, mitprägen. Dies ist ein Sachverhalt, der viel zu wenig Beachtung findet. In der Regel wird es umgekehrt empfunden: die Theorien bzw. die Wissenschaften brächten die Werkzeuge oder die Technologien erst hervor.

Zunächst war das Thema Chaos vor allem für die Mathematik, Physik, Chemie, Populationsdynamik und in manchen Ingenieurdisziplinen von großem Interesse. Konnten dadurch doch viele Phänomene und oft als Schmutzeffekte eingestufte Unregelmäßigkeiten wenigstens zum Teil erklärt werden. Vor allem in den achtziger Jahren weckten attraktiv aufgemachte Publikationen und Ausstellungen von einer Reihe von Wissenschaftlern das Interesse einer breiten Öffentlichkeit an den manchmal als revolutionär bezeichneten Ergebnissen. Daß dann das Thema in vielfältiger Weise in vielen anderen, auch nichtwissenschaftlichen Bereichen aufgegriffen wurde, ist nicht verwunderlich.

Natürlich hat diese Publicity für eine an und für sich sehr trockene Materie aus Mathematik, Naturwissenschaften und Technik durchaus erfreuliche Elemente. Vor allem der Mathematikunterricht könnte damit wieder bilder-, experimentier- und anwendungsfreundlicher werden. Schüler und Studenten haben vielleicht wieder mehr Spaß an diesen Fächern. Aber die Popularität des Themas Chaos hat auch gezeigt, daß falsche Annahmen, mangelhafte Darstellungen, grobe Vereinfachungen und spekulative Schlußfolgerungen zu vielen Mißverständnissen führten und deshalb überzogene Erwartungen nicht erfüllt werden konnten. David Ruelle hat einmal gesagt: *Es ist mutig und vielleicht auch frech, Ergebnisse von physikalischen Experimenten und Modellen z. B. auf die Ökonomie oder Soziologie zu übertragen.*

Wir sind heute in der günstigen Lage, das Verhalten selbst komplexer Systeme mit Computer simulieren und uns fast spielerisch an ihre Eigenschaften gewöhnen zu können. Die klassischen Handwerkszeuge der Mathematik, nämlich Tafel, Kreide und Schwamm werden heute in der experimentellen Mathematik durch leistungsfähige Computer und hochauflösende Farbgrafik-Bildschirme ersetzt. Mit der Gewöhnung schärft sich der Blick für allgemeine aber auch besondere Phänomene, Verständnis wächst auf beinahe empirische Weise.

Im Zuge solcher Bemühungen schaut sich ein Wissenschaftler gerne nach möglichst einfachen Systemen mit typischem Verhalten um. Es kann sehr hilfreich sein, mit dem mathematischen Pendel zu experimentieren. Schon an diesem simplen Beispiel lassen sich wesentliche Phänomene nichtlinearer dynamischer Systeme illustrieren. Aber ein Abbild komplexerer Systeme sind solche einfachen Modelle nicht.

Im Alltag haben wir es im allgemeinen mit untereinander verkoppelten Netzwerken zu tun, vor deren Komplexität wir häufig kapitulieren müssen. Ein Mediziner kann ein Lied davon singen. Das Verhalten großer, komplexer Systeme von Elementarteilchen kann sicher nicht durch einfache Extrapolation der Eigenschaften weniger Teilchen verstanden werden. Hingegen tauchen auf jeder Komplexitätsstufe neue Eigenschaften auf. Deshalb sollten wir uns hüten, voreilige Schlußfolgerungen für komplizierte Systeme aus einfachen Systemen abzuleiten.

> „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile" klingt wie eine Banalität, ist es aber nicht, wie man in der nichtlinearen Dynamik immer wieder erfährt.

Damit sind wir bei den Grenzen der Chaosforschung. Trotz einiger wichtiger Erkenntnisse muß man heute feststellen, daß die sogenannte Chaostheorie in vielen Disziplinen noch nicht die erhofften, oder man sollte vielleicht besser sagen, die propagierten Erfolge vorweisen kann.

Das menschliche Gehirn und das Nervensystem sind eben doch wesentlich verwickelter als viele physikalische Systeme. Die Elemente sozialer Systeme verfügen über einen eigenen Willen. Menschen können auf wirtschaftliche oder politische Prognosen kreativ reagieren und damit jede langfristige Vorhersagbarkeit zunichte machen. Es ist meiner Meinung nach prinzipiell nicht möglich, die schöpferischen Eigenschaften des Menschen in einem Modell auch nur annähernd zu erfassen.

Die Forschung auf diesem wichtigen und sehr anregenden Teilgebiet der nichtlinearen Dynamik ist noch zu jung, um aus ihr bereits eine umwälzende Wirkung abzuleiten. Aber sicher ist, daß das Thema Chaos viele ernsthafte Ergebnisse hervorgebracht hat und damit nicht nur eine Spielerei ist. Wir befinden uns heute in einer merkwürdigen Situation: In dem Maße, in dem unsere Möglichkeiten des Nachweises von chaotischen Bewegungen wachsen, wird es immer schwieriger, die Bedeutung des Chaos zu bewerten. Chaos ist aber weder Aberglaube noch Welterklärung.

Zweifellos werden Chaos und Fraktale einige dauerhafte Spuren hinterlassen, auch physikalische Erkenntnisse von bleibendem Wert. Die sogenannte Chaostheorie, deren gegenwärtiger Zustand von Peitgen einmal als „Sammelsurium von Ideen" bezeichnet wurde, ist ein Teil der umfassenden Theorie dynamischer Systeme und wird es auch bleiben. Ähnlich verhielt es sich mit der ebenfalls viel Aufsehen erregenden Katastrophentheorie, sie ist Teil der Singularitätentheorie der Mathematik, Steffen (1994).

Lorenz' Entdeckung des Schmetterlingseffekts beruht darauf, daß im Zentrum seiner Untersuchungen nicht das wirkliche Wetter stand, sondern ein „Computerwetter". Sein

Labor war keine Wetterstation, vielmehr waren Wirklichkeit und Labor im Computer zu einer Modellwelt verschmolzen, und es wurde eine Scheinwelt simuliert. Von Lorenz selbst wurde dies auch nicht anders dargestellt!

Damit komme ich auf die eingangs gestellte Frage zurück. Es mag nicht überraschen, daß die Antwort zwiespältig ist: Bei der Erforschung von Systemen, die sich scheinbar unregelmäßig, chaotisch verhalten, obwohl sie durch deterministische Gleichungen beschrieben werden, ist viel Nützliches entstanden. Viele modische Erscheinungen, die durch das Thema Chaostheorie aufgekommen sind, werden aber, wie das in der Mode so üblich ist, vergänglich sein.

Danksagung: Für die Hilfe bei der Vorbereitung der druckfertigen Bilder danke ich den Herrn Dipl-Ing. Torsten Keller und Dipl.-Ing. Bodo Lagemann.

Literatur

Arecchi, T.: Chaos und Undeutlichkeit. LIBER (1989) Nr. 1, S. 16–17.
Argyris, J.; Faust, G.; Haase, M.: Die Erforschung des Chaos. Braunschweig/...: Vieweg 1994.
Bammé, A.; Kotzmann, E.: Der Schmetterlingseffekt. VDI nachrichten magazin (1989) Nr. 7, S. 38–40.
Brügge, P.: Kult um das Chaos – Aberglaube oder Welterklärung? DER SPIEGEL, Jg. 47 (1993) Nr. 39, S. 156–164; Nr. 40, S. 232–241; Nr. 41, S. 240–252.
Duffing, G.: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig: F. Vieweg, Heft 41/42, 1918.
Jackson, E.A.: Perspectives of nonlinear dynamics. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press 1989.
Kreuzer, E.; Kleczka, M.; Schaub, S.: Chaotic Dynamics of a Simple Oscillator – A Pictorial Introduction. Chaos, Solitons & Fractals 1 (1991) Nr. 5, S. 439–456.
Nicolis, C.: Le climat pent-il basculer. La Recherche 22 (1991) Nr. 232, S. 584–587.
Lorenz, E.N.: Deterministic Nonperiodic Flow. J. of Atmospheric Sci. 20 (1963) S. 130–141.
Peitgen, H.-O.; Jürgens, H.; Saupe, D.: Bausteine des Chaos – Faktale. Berlin/...: Springer-Verl. 1992.
Peitgen, H.-O.; Richter, P.H.: The Beauty of Fractals. Images and Complex Dynamical Systems. Berlin/...: Springer-Verl. 1986.
Peitgen, H.-O.; Saupe, D. (eds.): The Science of Fractal Images. New York/...: Springer-Verl. 1988.
Reti, L. (ed.): Leonardo – Künstler, Forscher, Magier. Frankfurt: Fischer Verl. 1974.
Richter, P.H.: Dullin, H.; Peitgen, H.-O. : Der SPIEGEL, das Chaos – und die Wahrheit. Phys. Bl. 50 (1994) Nr. 4, S. 355–358.
Steffen, K.: Chaos, Fraktale und das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit. DMV Mitteilungen 1 (1994) S. 25–40.
Straub, D.: Eine Geschichte des Glasperlenspiels. Irreversiblität in der Physik: Irritationen und Folgen. Basel/...: Birkhäuser 1990.

Prof. Dr.-Ing. E. Kreuzer
Arbeitsbereich Meerestechnik II der TU Hamburg-Harburg · Eißendorfer Straße 42
21071 Hamburg